Serie 11

1. Frau A und Herr B wollen sich treffen und verabreden sich für 16 Uhr in einem Café. Mit T_A bzw. T_B bezeichnen wir die Differenz zwischen der tatsächlichen Ankunftszeit von A bzw. B und 16 Uhr in Minuten. Wenn z.B. das Ereignis $\{T_A \leq -5\}$ eintritt, so bedeutet dies, dass A spätestens um 15:55 Uhr ankommt. T_A und T_B seien unabhängige Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass $T_A \sim \mathcal{N}(0, 3)$ und $T_B \sim \mathcal{N}(-6, 4)$, wobei $\mathcal{N}(m, \sigma)$ eine Normalverteilung mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 beschreibt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass B vor 16 Uhr im Café eintrifft?

Im Folgenden nehmen wir die Tatsache an, dass wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ unabhängig sind, dann ist $X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)$.

b) Wie ist $X = T_A - T_B$ verteilt?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft A vor B ein?

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B innerhalb einer Minute ankommen?

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zeit, die die zuerst eintreffende Person auf die andere Person warten muss.

2. Es seien X und Y unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$ - verteilte Zufallsvariablen. Wir definieren die Zufallsvariable Z durch

$$Z := \text{sign}(Y) \cdot X = \begin{cases} X, & \text{falls } Y > 0, \\ -X, & \text{falls } Y \leq 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[X + Z = 0]$.

c) Sind X und Z unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein mathematisches Argument.

Bitte wenden!

Wir betrachten ein Rechteck mit zufälligen Seitenlängen A und B. Die gemeinsame Dichtefunktion von A und B ist gegeben durch

$$f_{A,B}(a,b) := \begin{cases} c(a+b^2), & 0 \leq a, b \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

d) Bestimmen Sie die Konstante c.

e) Berechnen Sie die Randdichten von A und B.

f) Sind A und B unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Seite A länger als die Seite B ist.

3. Seien X und Y unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf $[0,1]$. Wir betrachten das Rechteck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(X,0)$, (X,Y), $(0,Y)$. Sei A der Flächeninhalt dieses Rechtecks.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von A und die Kovarianz von X und A.

b) Bestimmen Sie die beste lineare Prognose von A durch X, und von X durch A.

c) Finden Sie die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion von Y/X.
Hinweis: Zeichnen Sie die Menge der Punkte (X,Y), die $Y/X \leq a$, $a > 0$, erfüllen.

4. Beim Testen von Milch auf bakteriologische Verunreinigungen wird $0.01ml$ Milch über eine Glasfläche von $1cm^2$ verteilt. Diese Fläche wird in $N = 400$ gleich grosse Quadrätchen unterteilt und die Bakterienkolonien darin unter dem Mikroskop ausgezählt. Man hat dabei die folgende Anzahl n_k von Quadrätchen mit genau k Kolonien gefunden:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	19
n_k	56	104	80	62	42	27	9	9	5	3	2	1

Wir nehmen an, dass die Anzahl X der Bakterien in einem Quadrätchen eine Poissonverteilung mit Parameter λ hat.

a) Finden Sie einen "natürlichen" Schätzer des Parameters λ einer Poissonverteilung und berechnen Sie die erwartete Anzahl Quadrätchen mit k Kolonien, d.h. $400 \cdot P[X = k]$.

b) Betrachten Sie die Abweichungen der n_k von ihrem Erwartungswert. Denken Sie, dass diese Schwankungen als zufällig betrachtet werden können, oder denken Sie, dass die Poissonverteilung hier nicht passt?

Siehe nächstes Blatt!

Um das Ganze genauer zu analysieren, führen wir einen Chi-Quadrat Anpassungstest durch und gehen dabei wie folgt vor:

c) Berechnen Sie für die obigen Daten die Grössen

$$\frac{(\text{beobachtete Anzahl} - \text{erwartete Anzahl})^2}{\text{erwartete Anzahl}}$$

für alle gegebenen k, und den Wert der Chi-Quadrat-Teststatistik T_N. Verwenden Sie $\{k \geq 8\}$ für den Schwanz der Verteilung.

d) Wie entscheidet der Test auf den Niveaus $\alpha = 5\%$ und 1%?

5. Die Anreicherung einer Legierung mit einem Metall soll den Volumenausdehnungskoeffizienten reduzieren. Um diese Hypothese nachzuprüfen, wurde der Koeffizient an 12 Proben der neuen Legierung bei gleicher Temperaturänderung gemessen. Die Ergebnisse sind wie folgt:

1.00781 1.00646 1.00801 1.00833 1.00738 1.00687
1.00783 1.00936 1.00564 1.00543 1.00794 1.01060

Der Koeffizient der Standardlegierung (d.h. ohne Anreicherung) beträgt 1.0085. Man nimmt an, dass die Daten normalverteilt sind mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma = 0.0014$.

a) Prüfen Sie mit einem Test auf dem 5% Niveau die Nullhypothese $\mu = 1.0085$ gegen die Alternative $\mu = 1.008$.

b) Berechnen Sie die Macht für den in **a)** bestimmten Test.

c) Was passiert in **b)**, wenn die Alternative $\mu = 1.007$ ist?

6. Um die Anzahl Fische N in einem Teich zu schätzen, wird folgendes Experiment durchgeführt: 10 Fische werden eingefangen, mit einem Merkmal versehen und wieder in den Teich gebracht. Man nimmt an, dass sich nach einer gewissen Zeitspanne die gekennzeichneten Fische mit den übrigen gut vermischt haben. In einem zweiten Fang wurden 15 Fische wieder gefangen und es seien darunter 5 markierte und 10 nicht markierte Fische.

Um einen vernünftigen Schätzwert für N zu finden, gehen wir folgt vor: Es sei X die Anzahl markierter Fische unter den 15 Fischen aus dem zweiten Fang. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_N von X als Funktion von N und untersuchen Sie, für welches N die Wahrscheinlichkeit $P_N[X = 5]$ maximal wird.

Bitte wenden!

7. Sei X eine Zufallsvariable mit $E[X] = m$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Seien X_i, $i = 1, \ldots, n$, unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung wie X.

a) Finden Sie einen "natürlichen" Schätzer $\widehat{m}$ von m.

b) Finden Sie einen "natürlichen" Schätzer $\widehat{\sigma}^2$ von $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E[(X - m)^2]$.

c) Berechnen Sie $E[(X_j - \widehat{m})^2]$ für $j = 1, \ldots, n$ mit Hilfe von $\widehat{m}$ aus **a)**.

d) Berechnen Sie $E[\widehat{\sigma}^2]$. Können Sie eine einfache Verbesserung von $\widehat{\sigma}^2$ vorschlagen?

8. Eine meteorologische Firma arbeite mit folgendem Modell für die Niederschlagsmenge in den Tropen. Die Zufallsvariable X beschreibe die tägliche Niederschlagsmenge in mm, und die zugehörige Dichte sei gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-\eta x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

für $c, \eta > 0$.

a) Wie muss c für ein fest vorgegebenes η gewählt werden, damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt?

Es bezeichne X_i die Niederschlagsmenge in mm am Tag $i \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Niederschlagsmengen an verschiedenen Tagen unabhängig voneinander sind und die gleiche Verteilung haben wie X.

b) Wir reden von einem "Monsuntag", falls die Niederschlagsmenge an jenem Tag mehr als 10 mm beträgt. Es sei $L = \min\{k \geq 1 | X_k \text{ ist ein Monsuntag}\}$. Die Zufallsvariable L besitzt also eine geometrische Verteilung, d.h. $L \sim \mathrm{Geom}(p)$. Welchen Wert hat p?

c) Im Allgemeinen sind die Werte von p (und η) unbekannt und müssen anhand von Daten geschätzt werden. Um p zu schätzen, werden an 6 verschiedenen Messstationen L_i, $1 \leq i \leq 6$, für L je eine Messung durchgeführt. Wir nehmen an, dass die L_i, $1 \leq i \leq 6$, unabhängig und geometrisch verteilt sind mit Parameter p. Folgende Realisierungen $L_i(\omega) = l_i$, $1 \leq i \leq 6$, wurden beobachtet:

Messstation	1	2	3	4	5	6
l_i	4	3	7	8	11	15

Schätzen Sie p mittels der Maximum-Likelihood-Methode. Geben Sie dazu sowohl den Schätzer p_{MLE} wie auch den Schätzwert $\widehat{p}_{MLE}$ an.

Siehe nächstes Blatt!

9. Eine Tankstelle veranschlagt für einen Ölwechsel mindestens α Minuten. Die tatsächlich benötigte Zeit X variiert natürlich im Bereich $X \geq \alpha$ und ist von Kunde zu Kunde verschieden. Man kann jedoch annehmen, daß die Zeit $X - \alpha$ durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 gut wiedergegeben wird. X besitzt somit die Dichtefunktion

$$f_X(t) = \begin{cases} e^{\alpha - t}, & \text{falls } t \geq \alpha, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $X = \alpha + Z$ mit $Z \sim \text{Exp}(1)$. Um α schätzen zu können, wurde von 10 zufällig ausgewählten Kunden die für den Ölwechsel benötigte Arbeitszeit in Minuten notiert: 4.2, 3.1, 3.6, 4.5, 5.1, 7.6, 4.4, 3.5, 3.8, 4.3. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den unbekannten Parameter α.

10. Hinter einem Vorhang stehen zwei Urnen A und B. Urne A enthält eine weisse und vier schwarze Kugeln. Urne B enthält drei weisse und zwei schwarze Kugeln. Jemand wählt nun eine der beiden Urnen zufällig aus, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wird $p \in [0, 1]$ beträgt. Anschliessend wird die gewählte Urne hervorgeholt, und daraus unabhängig eine zufällig gewählte Kugel entnommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_W(p)$ (in Abhängigkeit von p), dass die gewählte Kugel weiss ist.

b) Sie wollen nun p schätzen und führen das obige Experiment zehn Mal durch. Die Kugel wird dabei nach jedem Experiment wieder in die Urne zurückgelegt. Die Farben der gewählten Kugeln sind

weiss, schwarz, weiss, schwarz, schwarz, schwarz, weiss, schwarz, weiss, weiss.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Folge (in Abhängigkeit von $p_W(p)$) und bestimmen Sie anschliessend den Maximum-Likelihood-Schätzwert für p.

11. Ein Würfel wird so lange geworfen, bis eine 6 erscheint. An diesem Punkt wird das Experiment beendet. Was ist der Grundraum dieses Experiments? Sei E_n das Ereignis, dass n mal gewürfelt werden muss, bis das Experiment gestoppt wird. Welche Punkte des Grundraums sind in E_n enthalten? Wie lässt sich das Ereignis $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ in Worten beschreiben?

12. Sie nehmen an einem Pokerspiel mit drei weiteren Mitspielern teil, wobei mit den üblichen 52 Karten mit den Farben Ecken, Herz, Kreuz und Schaufel gespielt wird. Jeder Spieler erhält 5 Karten, die wir im folgenden Hand nennen.

Bitte wenden!

a) Wie viele mögliche Hände können Sie erhalten?

b) Wie viele mögliche Hände können Sie erhalten, wobei alle fünf Karten dieselbe Farbe haben?

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie eine Hand erhalten, wobei die fünf Karten alle dieselbe Farbe haben?

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass Ihre Hand ein Vierling enthält (z.B. vier Damen)?

e) Angenommen, Ihre Hand besteht aus 4 Buben und 1 Dame. Wie hoch ist die Anzahl der Hände, die ein höheres Vierling enthalten?

13. (COUPON COLLECTOR'S PROBLEM) Eine Person sammelt Gutscheine von drei Typen. Der erste Typ ist für eine gratis Pizza, der zweite für ein gratis Getränk und der dritte für ein gratis Dessert. Die Person erhält jeden Tag einen Gutschein zufällig, wobei jeder Typ gleich wahrscheinlich ist. Für $t = 1, 2, \ldots$ sei X_t die Zufallsvariable, die den Typ des erhaltenen Gutscheines am Tag t beschreibt. Wir nehmen an, dass für jedes fixe T und jede Sequenz $\{x_s\}_{s=1,\ldots,T}$ mit $x_s \in \{\text{Pizza, Getränk, Dessert}\}$ die Ereignisse $\{X_s = x_s\}_{s=1,\ldots,T}$ unabhängig sind.

Seien T_i, $i = 1, 2, 3$, die Zufallsvariablen, welche den ersten Tag angeben, an dem die Person Gutscheine von genau i verschiedenen Typen hat. Klarerweise gilt $T_1 = 1$ und T_3 beschreibt den ersten Tag, an dem die Person genügend Gutscheine für ein gratis Mittagessen hat. Die Zufallsvariablen $T_2 - T_1$ und $T_3 - T_2$ werden "Zwischenankunftszeiten " von einem neuen Typ genannt.

Beweisen Sie, dass die Ereignisse $\{T_2 - T_1 = i\}$ und $\{T_3 - T_2 = j\}$ für $i, j \geq 1$ unabhängig sind.

14. Wir betrachten 6 Würfel, wovon 4 Würfel fair sind (d.h. jede der Augenzahlen $1, \ldots, 6$ kommt mit derselben Wahrscheinlichkeit vor) und 2 Würfel gefälscht sind. Bei den gefälschten Würfeln kommt die Augenzahl 6 mit Wahrscheinlichkeit 3/8 vor und die restlichen Augenzahlen $1, \ldots, 5$ mit derselben Wahrscheinlichkeit. Die Würfel seien äusserlich nicht unterscheidbar und es werde nun zufällig ein Würfel gewählt und damit einmal gewürfelt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augenzahl eine 6 ist?

b) Nehmen Sie an, die gewürfelte Augenzahl sei eine 6. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit einem gefälschten Würfel gewürfelt wurde?

Siehe nächstes Blatt!

Wir wiederholen nun dieses Vorgehen, d.h. in jedem Schritt wird einer der 6 Würfel zufällig gewählt und es wird damit einmal gewürfelt. Es bezeichne T den Zeitpunkt, bei welchem zum ersten Mal eine 3 gewürfelt wird.

c) Was ist die Verteilung von T?

d) Berechnen Sie den Erwartungswert von T.

e) Nun werde der Würfel nur beim ersten Mal zufällig gewählt und danach werde immer mit diesem Würfel gewürfelt. Berechnen Sie für diesen Fall für $k \geq 1$, $P[T = k]$.

Abgabe: Dieses Blatt hat kein Abgabedatum, jedoch ist jede der Aufgaben Klausurrelevant, so wie die Aufgaben auf allen anderen Übungsblättern. Es wird empfohlen alle Aufgabenblätter von 1 bis 11 zu wiederholen.

Die Chi-Quadrat Verteilung mit r Freiheitsgraden

$$P[X \le x] = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}}\, y^{r/2-1} e^{-y/2}\, \mathrm{d}y$$

r	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892

Beispiel: sei X eine Zufallsvariable mit einer Chi-Quadrat Verteilung mit $r = 16$ Freiheitsgraden. Dann ist $P[X \le 32] = 0.99$.

Siehe nächstes Blatt!

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\, dz$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6408	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999
3.1	.999032	.999065	.999096	.999126	.999155	.999184	.999211	.999238	.999264	.999289
3.2	.999313	.999336	.999359	.999381	.999402	.999423	.999443	.999462	.999481	.999499
3.3	.999517	.999534	.999550	.999566	.999581	.999596	.999610	.999624	.999638	.999651
3.4	.999663	.999675	.999687	.999698	.999709	.999720	.999730	.999740	.999749	.999758
3.5	.999767	.999776	.999784	.999792	.999800	.999807	.999815	.999822	.999828	.999835
3.6	.999841	.999847	.999853	.999858	.999864	.999869	.999874	.999879	.999883	.999888
3.7	.999892	.999896	.999900	.999904	.999908	.999912	.999915	.999918	.999922	.999925
3.8	.999928	.999931	.999933	.999936	.999938	.999941	.999943	.999946	.999948	.999950
3.9	.999952	.999954	.999956	.999958	.999959	.999961	.999963	.999964	.999966	.999967